

Spécialité mathématiques - Correction ex17 (Séquence 5)

Exercice 17 [Ra-Ca-Co]

Dans un repère de l'espace, on considère les points suivants : A(1 ; 5 ; 2) ; B(-2 ; 3 ; 4) ; C(-2 ; -2 ; 0) et D(7 ; -3 ; 1).

- 1) ABDC est-il un parallélogramme ?

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}, \text{ soit } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}. \text{ Donc ABDC n'est pas un parallélogramme.}$$

- 2) Calculer les coordonnées du milieu de [AB].

Soit I le milieu de [AB].

$$\text{Donc } I \left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} ; \frac{z_A + z_B}{2} \right), \text{ soit } I \left(\frac{-1}{2} ; 4 ; 3 \right).$$

- 3) Déterminer les coordonnées de K tel que ABCK soit un parallélogramme.

$$\text{ABCK est un parallélogramme} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KC}$$

$$\text{Or, } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{KC} \begin{pmatrix} -2 - x_K \\ -2 - y_K \\ -z_K \end{pmatrix}$$

$$\text{ABCK est un parallélogramme} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 - x_K = -3 \\ -2 - y_K = -2 \\ -z_K = 2 \end{cases}$$

$$\text{ABCK est un parallélogramme} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = 1 \\ y_K = 0 \\ z_K = -2 \end{cases}$$

Donc **K(1 ; 0 ; -2)**.

- 4) Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ défini par $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD}$.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Or, } \vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD}, \text{ donc } \vec{u} \begin{pmatrix} -28,5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- 5) Les droites (AC) et (BD) sont-elles parallèles ?

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}. \text{ Les coordonnées de } \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{BD} \text{ ne sont pas proportionnelles.}$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne sont pas colinéaires. **Donc les droites (AC) et (BD) ne sont pas parallèles.**

- 6) E est le point de coordonnées $(2 ; \frac{17}{3} ; \frac{4}{3})$. Les points A, B et E sont-ils alignés ?

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}. \text{ On constate que } \overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AE}.$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires. **Donc les points A, B et E sont alignés.**

- 7) Calculer les coordonnées du point A' symétrique de A par rapport à B.

A' symétrique de A par rapport à B $\Leftrightarrow$ B est le milieu de [AA']

$$\text{A' symétrique de A par rapport à B} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \\ y_B = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \\ z_B = \frac{z_A + z_{A'}}{2} \end{cases} : (S)$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1 + x_{A'}}{2} = -2 \\ \frac{5 + y_{A'}}{2} = 3 \\ \frac{2 + z_{A'}}{2} = 4 \end{cases} ; (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = -5 \\ y_{A'} = 1 \\ z_{A'} = 6 \end{cases}. \text{ Donc } \mathbf{A'(-5 ; 1 ; 6)}.$$

Autre méthode : A' symétrique de A par rapport à B $\Leftrightarrow$ B est le milieu de [AA']

$$\text{A' symétrique de A par rapport à B} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA'}.$$